Chapitre 19 : Applications linéaires

Table des matières

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1 (application linéaire)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Une application linéaire de E dans F est une application $f : E \to F$ telle que :

$$\forall x,y \in E,\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K} : \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Notation : L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$.

Variantes :

1. On peut séparer la condition de linéarité en :
   (i) $\forall x,y \in E : \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$
   (ii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} : \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$
2. La condition de linéarité peut être remplacée par : $\boxed{\forall x,y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)}$.

Exemple 1.2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{K}_{n+1}[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ telle que $f : P \mapsto P'$.
Montrer que f est une application linéaire.

Remarques :

1. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors : $\forall x_1, \cdots ,x_n \in E,\ \forall \lambda_1, \cdots ,\lambda_n \in \mathbb{K},\ f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$
2. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$.

Définition 1.3 (applications linéaires particulières)

On dit qu'une application linéaire est :

1. un endomorphisme si l'espace de départ est le même que l'espace d'arrivée ;
2. un isomorphisme si elle est bijective ;
3. un automorphisme si l'espace de départ est le même que l'espace d'arrivée et si elle est bijective (c'est-à-dire si elle est à la fois un endomorphisme et un isomorphisme).

Notations : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$ (plutôt que $\mathscr{L}(E,E)$).
2. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$.

Exemple 1.4 : Déterminer à quels ensembles appartiennent les applications suivantes :

- $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ telle que $f : P \mapsto P''$.
- $g : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ telle que $g : P \mapsto 3P$.
- $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ telle que $h : (a,b) \mapsto a + ib$.

Remarques : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- L'application $\mathrm{id}_E : E \to E$ est linéaire : c'est un endomorphisme (et même un automorphisme) de E.
- Plus généralement, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $\lambda \mathrm{id}_E : x \mapsto \lambda x$ est un endomorphisme de E.
  Un tel endomorphisme est appelé homothétie de rapport λ.

Exemple 1.5 : L'application $g : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ telle que $g : P \mapsto 3P$ est une homothétie de rapport 3.

1.2 Sous-espaces vectoriels associés à une application linéaire

1.2.1 Image d'une application linéaire

Rappel : Soit $f : E \to F$ une fonction.
Pour toute partie $A \subset E$, l'image directe de A par f est le sous-ensemble de F défini par :

$$f(A) = \{f(x) \ / \ x \in A\} = \{y \in F \ / \ \exists x \in A, \, y = f(x)\}$$

Dans le cas où $A = E$, $f(E)$ est appelé image de f, et noté $\mathrm{Im}(f)$. On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \ / \ x \in E\} = \{y \in F \ / \ \exists x \in E, \, y = f(x)\}$$

Théorème 1.6 (image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Pour tout sous-espace vectoriel A de E, l'ensemble $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Corollaire 1.7 (l'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Alors $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition 1.8 (famille génératrice de l'image d'une application linéaire)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Supposons qu'il existe une famille finie génératrice de E que l'on note $\mathscr{G} = (v_i)_{i \in I}$.
Alors $f(\mathscr{G}) \underset{\text{def}}{=} (f(v_i)_{i \in I})$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(v_i))_{i \in I}$$

Méthode : *Pour déterminer l'image d'une application linéaire, on calcule les images des éléments d'une base de l'ensemble de départ.*

Exemple 1.9 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ telle que $f : P \mapsto P'$. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

Proposition 1.10 (caractérisation de la surjectivité à l'aide de l'image)

Soit une application $f : E \to F$ (une application quelconque, pas forcément une application linéaire).
L'application f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Remarque : On a toujours $\mathrm{Im}(f) \subset F$, l'inclusion retour est vérifiée lorsque f est surjective.

Exemple 1.11 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ telle que $f : P \mapsto P'$. L'application f est-elle surjective ?

1.2.2 Noyau d'une application linéaire

Rappel : Soit $f : E \to F$ une fonction.
Pour toute partie $B \subset F$, l'image réciproque de B par f est le sous-ensemble de E défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\}$$

Théorème 1.12 (image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Pour tout sous-espace vectoriel B de F, l'ensemble $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Méthode : *Afin de montrer qu'un espace est un sous-espace vectoriel de E, on peut montrer que c'est l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.*

Exemple 1.13 : Montrer que $F = \{P \in \mathbb{K}[X], P^{(5)} \in \mathbb{K}_1[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Définition 1.14 (noyau d'une application linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Le noyau de f est le sous-espace vectoriel de E, noté $\mathrm{Ker}(f)$, défini de la manière suivante :

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_F\}$$

Théorème 1.15 (caractérisation de l'injectivité à l'aide du noyau)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ une application linéaire.
L'application f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Remarque : On a toujours $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f)$, l'inclusion retour est vérifiée lorsque f est injective.

Exemple 1.16 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ telle que $f : P \mapsto P'$. L'application f est-elle injective ?

1.3 Opérations sur les applications linéaires

1.3.1 Combinaison linéaire

Théorème 1.17 (espace vectoriel des applications linéaires de E dans F)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$. En particulier, c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque : Le vecteur nul de l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ est l'application nulle $x \mapsto 0_F$.

Cas particulier : L'ensemble $\mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.3.2 Composition

Proposition 1.18 (linéarité de la composée d'applications linéaires)

Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Alors la composée $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

Notation : Pour f et $g \in \mathscr{L}(E)$, on note fg pour la composée $f \circ g$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note aussi f^n pour $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$. Pour $n = 0$, $f^0 = \mathrm{id}_E$ (élément neutre pour $\circ$).

Attention : La composition n'est pas commutative.

Exemple 1.19 : Soit $E = \mathbb{R}^2$. Soient $f : (x,y) \mapsto (x,x+y)$ et $g : (x,y) \mapsto (x+y,y)$. On a $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$.
Montrer que $f \circ g \neq g \circ f$.

Proposition 1.20 (bilinéarité de la composition)

Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soient $f_1,f_2 \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g_1,g_2 \in \mathscr{L}(F,G)$.
On a $(g_1 + \lambda g_2) \circ f_1 = g_1 \circ f_1 + \lambda(g_2 \circ f_1)$ et $g_1 \circ (f_1 + \lambda f_2) = g_1 \circ f_1 + \lambda(g_1 \circ f_2)$.

Remarque : Si f et $g \in \mathscr{L}(E)$, on peut appliquer la formule du binôme pour calculer $(f+g)^n$, ou la formule de factorisation de $f^n - g^n$, **à condition que** f **et** g **commutent** (c'est-à-dire si $f \circ g = g \circ f$).
Ceci est par exemple le cas lorsque f ou g est égal à id_E, ou plus généralement à $\lambda \mathrm{id}_E$.

1.3.3 Réciproque

Théorème 1.21 (linéarité de la réciproque)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ un isomorphisme.
Alors l'application réciproque $f^{-1} : F \to E$ est linéaire (donc est aussi un isomorphisme).
En particulier, la réciproque d'un automorphisme est un automorphisme.

Définition 1.22 (groupe linéaire d'un espace vectoriel)

Soit E un un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.
Sur $\mathrm{GL}(E)$, la loi $\circ$ est interne, associative, possède un (unique) élément neutre qui est id_E et tout élément de $\mathrm{GL}(E)$ est inversible pour $\circ$.
On dit que $(\mathrm{GL}(E),\circ)$ est un « groupe », appelé groupe linéaire de E.

Remarque : En général, le groupe $(\mathrm{GL}(E),\circ)$ n'est pas commutatif (c.f. exemple 1.19).

Notation : Pour $f \in \mathrm{GL}(E)$, on note f^{-n} pour $\underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}}_{n \text{ fois}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Applications linéaires et dimensions

2.1 Image d'une base

Théorème 2.1 (détermination d'une application linéaire par l'image d'une base)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On suppose que E est de dimension finie et on note $\mathscr{B} = (v_i)_{i \in I}$ une base de E.
Alors pour toute famille $\mathscr{F} = (v'_i)_{i \in I}$ de F, il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(\mathscr{B}) = \mathscr{F}$, c'est-à-dire $\forall i \in I,\ f(v_i) = v'_i$.

Remarque : En particulier, si deux applications linéaires coïncident sur une base alors elles sont identiques.

Théorème 2.2 (caractérisation de la sur/in/bijectivité d'une AL par l'image d'une base)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ une application linéaire.
On suppose que E est de dimension finie et on note $\mathscr{B} = (v_i)_{i \in I}$ une base de E.

1. f est surjective si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est une famille génératrice de F.
2. f est injective si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est une famille libre de F.
3. f est un isomorphisme si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est une base de F.

Exemple 2.3 : Montrer que $f : (x,y,z) \mapsto (x,x+y,y+z)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2.2 Isomorphismes et dimensions

Définition 2.4 (espaces vectoriels isomorphes)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On dit que E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de E dans F.

Exemple 2.5 : Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ sont isomorphes.

Théorème 2.6 (caractérisation d'espaces vectoriels isomorphes par la dimension)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Si E et F sont isomorphes alors E et F ont la même dimension (finie ou infinie).
2. Réciproquement, si E et F sont de même dimension **finie**, alors E et F sont isomorphes.

En particulier, en dimension finie, deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.

Exemple 2.7 : Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n$.
Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Proposition 2.8 (dimension de $\mathscr{L}(E,F)$)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie, et $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.

Espaces de dimension finie déjà rencontrés :

Proposition 2.9 (solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1)

Soit I un intervalle non trivial, et soit a une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $y' + a(x)y = 0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

Proposition 2.10 (solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2)

Soient a et $b \in \mathbb{K}$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $y''+ay'+by=0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

Proposition 2.11 (suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2)

Soient a et $b \in \mathbb{K}$. L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire homogène $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

2.3 Propriétés remarquables dans les espaces de dimension finie

Théorème 2.12 (applications linéaires entre deux espaces de même dimension finie)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie, et soit $f : E \to F$ une application linéaire. On a alors les équivalences suivantes :

$$f \text{ est bijective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est surjective.}$$

Remarque : Ce théorème s'applique en particulier pour les endomorphismes d'un espace de dimension finie.

Méthode : *Pour montrer qu'une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie est un isomorphisme, il suffit de montrer qu'elle est injective ou surjective.*

Exemple 2.13 : Montrer que $f : (x,y,z) \mapsto (y+z, z+x, x+y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Corollaire 2.14 (endomorphisme inversible à gauche ou à droite en dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit f un endomorphisme de E.
On suppose qu'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_E$ ou $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
Alors f est un automorphisme de E, et $g = f^{-1}$.

Remarque : En dimension finie, il n'est pas nécessaire de vérifier $f \circ g = \mathrm{id}_E$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$ pour montrer que f est bijective et que $f^{-1} = g$. Une seule des deux égalités suffit.

3 Rang d'une application linéaire

3.1 Généralités

Définition 3.1 (rang d'une application linéaire)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ une application linéaire.
On appelle rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Im}(f)$.
Dans le cas où cette dimension est finie, on dit que l'application linéaire f est de rang fini.

Remarque : Comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, on a $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(F)$.

Exemple 3.2 : Déterminer le rang de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que $f : (x,y,z) \mapsto (x+y, y-z, x+z)$.

Proposition 3.3 (lien avec le rang d'une famille)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Pour toute famille génératrice $\mathscr{G} = (v_i)_{i\in I}$ de E, on a l'égalité $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(\mathscr{G}))$, où $f(\mathscr{G}) \underset{\text{def}}{=} (f(v_i))_{i\in I}$.

Remarque : En particulier, on a aussi $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(E)$, et donc $\boxed{\mathrm{rg}(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))}$.

Proposition 3.4 (majoration du rang d'une composée)

Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications linéaires. On a

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$$

Proposition 3.5 (invariance du rang par composition à gauche/droite par une injection/surjection)

Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications linéaires.

1. Si f est surjective, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$.
2. Si g est injective, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

Conséquence : Le rang est invariant par composition par un isomorphisme.

3.2 Théorème du rang

Lemme 3.6

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Supposons que $\mathrm{Ker}(f)$ admette un supplémentaire S dans E.
Alors f induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(f)$, *i.e.* l'application suivante est un isomorphisme :

$$\overline{f} : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Théorème 3.7 (théorème du rang)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ une application linéaire.
On suppose que E est de dimension finie. Alors : $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \mathrm{rg}(f)$.

Méthode : *Il est souvent plus facile de calculer le noyau, ce qui permet ensuite de connaître le rang et donc de déterminer plus facilement l'image.*

Exemple 3.8 : Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y-z, x-y, x+y, x+y+z) \end{array} \right.$.
Déterminer le rang de f puis une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4 Projecteurs et symétries

Théorème 4.1 (détermination d'une AL à l'aide d'une décomposition en somme directe)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soient E_1 et E_2 des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$. Soient F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de F.
Pour toutes applications linéaires $f_1 : E_1 \to F_1$ et $f_2 : E_2 \to F_2$, il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$.

Remarque : Autrement dit, une application linéaire est déterminée de manière unique par ses restrictions aux E_i. Par conséquent, si deux applications linéaires coïncident sur ces sous-espaces vectoriels, alors elles sont identiques.

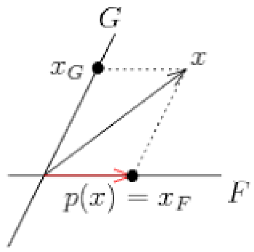
4.1 Projecteurs

Définition 4.2 (projecteur ou projection)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
On appelle projecteur (ou projection) sur F parallèlement à G (ou de direction G) l'unique endomorphisme p de E tel que $p_{|F} = \mathrm{id}_F$ et $p_{|G} = 0_{\mathscr{L}(G)}$, autrement dit p est l'unique endomorphisme de E tel que :

1. $\forall x \in F$, $p(x) = x$;
2. $\forall x \in G$, $p(x) = 0_E$.

Remarque : Avec les mêmes notations, si $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, alors $p(x) = x_F$.



Projection sur F parallèlement à G

Remarque : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
On note :

- p_F la projection sur F parallèlement à G ;
- p_G la projection sur G parallèlement à F.

Alors pour tout $x \in E$, $x = \underbrace{p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{p_G(x)}_{\in G}$ est la décomposition de x sur les deux sous-espaces F et G.

On a donc : $p_F + p_G = \mathrm{id}_E$.

Proposition 4.3 (détermination des sous-espaces caractéristiques d'une projection)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $p \in \mathscr{L}(E)$ une projection.
On note F et G les deux sous-espaces vectoriels supplémentaires tels que p est la projection sur F parallèlement à G.
Alors ces sous-espaces F et G sont caractérisés par les égalités suivantes :

1. $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ (ensemble des points fixes de p) ;
2. $G = \mathrm{Ker}(p)$ (noyau de p).

Remarque : Une projection n'est pas bijective, sauf s'il s'agit de l'identité (projection sur E de direction $\{0_E\}$).

Théorème 4.4 (caractérisation des projections parmi les endomorphismes)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit p un endomorphisme de E.
L'endomorphisme p est une projection si et seulement si $p^2 = p$ (où $p^2 = p \circ p$).

Exemple 4.5 : Soit $p : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \frac{1}{2}(x+y,x+y) \end{array} \right.$.
Montrer que p est une projection et déterminer ses sous-espaces caractéristiques.

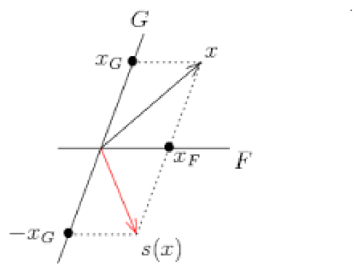
4.2 Symétries

Définition 4.6 (symétrie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G (ou de direction G) l'unique endomorphisme s de E tel que $s_{|F} = \mathrm{id}_F$ et $s_{|G} = -\mathrm{id}_G$, autrement dit s est l'unique endomorphisme de E tel que :

1. $\forall x \in F$, $s(x) = x$;
2. $\forall x \in G$, $s(x) = -x$.

Remarque : Avec les mêmes notations, si $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, alors $s(x) = x_F - x_G$.



Symétrie par rapport à F parallèlement à G

Proposition 4.7 (lien entre projections et symétries)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient F et G des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
On note p la projection sur F parallèlement à G, s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
Alors $s = 2p - \mathrm{id}_E$.

Proposition 4.8 (détermination des sous-espaces caractéristiques d'une symétrie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $s \in \mathscr{L}(E)$ une symétrie.
On note F et G les deux sous-espaces vectoriels supplémentaires tels que s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
Alors ces sous-espaces F et G sont caractérisés par les égalités suivantes :

1. $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ (ensemble des points fixes de s) ;
2. $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ (ensemble des vecteurs changés en leurs opposés par s).

Théorème 4.9 (caractérisation des symétries parmi les endomorphismes)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit s un endomorphisme de E.
L'endomorphisme s est une symétrie si et seulement si $s^2 = \mathrm{id}_E$ (où $s^2 = s \circ s$).

Remarques :
- Une symétrie est donc une involution.
- Une symétrie est un automorphisme, qui est égal à sa réciproque.

Exemple 4.10 : Soit $s : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X] \\ P \mapsto P(-X) \end{array} \right.$.
Montrer que s est une symétrie et déterminer ses sous-espaces caractéristiques.

5 Équations linéaires

Définition 5.1 (équation linéaire)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $f : E \to F$ une application linéaire et soit $a \in F$.
Une équation linéaire est une équation de la forme $f(x) = a$ d'inconnue $x \in E$.

Proposition 5.2 (résolution d'une équation linéaire)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $f : E \to F$ une application linéaire et soit $a \in F$.
L'ensemble des solutions de l'équation linéaire $f(x) = a$ d'inconnue $x \in E$ est soit vide, soit de la forme :

$$x_0 + \mathrm{Ker}(f) \underset{\text{def}}{=} \{x_0 + x_H \ / \ x_H \in \mathrm{Ker}(f)\}.$$

où x_0 est une solution particulière de l'équation linéaire.

Remarque : Les ensembles ci-dessous peuvent être considérés comme solutions d'une équation linéaire.

1. L'ensemble des solutions d'un système linéaire de p équations à n inconnues.
2. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre n sur un intervalle I non trivial.
3. L'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire.
4. L'ensemble des polynômes vérifiant des conditions d'interpolation données.

Exemples 5.3 :

1. Ensemble des solutions d'un système linéaire.
   Résoudre le système linéaire suivant $(S) : \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 & = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = 2 \end{array} \right.$.
2. Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire.
   Déterminer l'ensemble des solutions de $(E) : y' + y = \exp(x)$.
3. Ensemble des suites vérifiant vérifiant une relation de récurrence linéaire.
   Déterminer l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Ensemble des polynômes vérifiant des conditions d'interpolation données.
   Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(-1) = P(1) = 1$.

6 Formes linéaires et hyperplans

6.1 Définitions et premiers exemples

Définition 6.1 (forme linéaire)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée <u>une forme linéaire sur E</u>.
On notera $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$, ou bien encore E^*.

Remarque : Attention la notation E^* peut porter à confusion. Il ne faut pas confondre avec $E\backslash\{0\}$.

Exemple 6.2 : $f : (x_1, \dots ,x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 6.3 (hyperplan)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Un <u>hyperplan de E</u> est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E. Autrement dit, H est un hyperplan de E s'il existe une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$ non nulle telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Remarque : En particulier, un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel strict de E.

Exemple 6.4 : Montrer que $H_\alpha = \{P \in \mathbb{K}[X], P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$.

6.2 Supplémentaire d'un hyperplan

Proposition 6.5 (supplémentaire d'un hyperplan)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Si H est un hyperplan de E, alors pour toute droite D non contenue dans H, on a : $E = H \oplus D$.
2. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan, et tout supplémentaire d'un hyperplan est une droite.

Ainsi, un sous-espace vectoriel de E est un hyperplan si et seulement si c'est le supplémentaire d'une droite.

Méthode : *Pour trouver un supplémentaire d'un hyperplan H, il suffit de choisir un vecteur $v \notin H$ et de prendre la droite $D = Vect(v)$.*

Exemple 6.6 : Déterminer un supplémentaire de $H_\alpha = \{P \in \mathbb{K}[X], P(\alpha) = 0\}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$.

Corollaire 6.7 (proportionnalité des formes linéaires associées à un même hyperplan)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit H un hyperplan de E.
Si φ_1 et φ_2 sont deux formes linéaires non nulles sur E telles que $H = \mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Ker}(\varphi_2)$, alors φ_1 et φ_2 sont proportionnelles, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $\varphi_1 = \alpha\varphi_2$.

6.3 Formes coordonnées et équations d'hyperplans en dimension finie

Proposition 6.8 (hyperplan en dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit H un sous-espace vectoriel de E.
H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

Remarque : La définition d'un hyperplan coïncide bien avec la définition vue dans le chapitre ≪ Dimension ≫.

Définition 6.9 (formes coordonnées relativement à une base finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.
Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note e_i^* l'unique forme linéaire sur E telle que : $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$.
Si $x \in E$ a pour coordonnées $(x_1,...,x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$, alors $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ et donc par linéarité de e_i^* on obtient :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \quad e_i^*(x) = x_i.$$

Pour cette raison, les formes linéaires e_i^* sont appelées <u>formes coordonnées relativement à la base $\mathscr{B}$</u>.

Exemple 6.10 : Soit $E = \mathbb{K}_2[X]$. Soit (e_0^*,e_1^*,e_2^*) les formes coordonnées relativement à la base canonique $(1,X,X^2)$. Calculer $e_i^*((X+1)^2)$ pour tout $i \in [\![0;2]\!]$.

Proposition 6.11 (base de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.
La famille $\mathscr{B}^* \underset{\text{def}}{=} (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$.

Équations d'un hyperplan dans une base :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit H un hyperplan de E défini par $\mathrm{Ker}(\varphi)$ (avec $\varphi : E \to \mathbb{K}$ forme linéaire non nulle).

On peut décomposer φ dans la base $\mathscr{B}^*$ sous la forme $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*$. De plus, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $a_i = \varphi(e_i)$.

Si x est un vecteur de E qui a pour coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$, alors :

$$x \in H \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0.$$

On dit que $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ est une <u>équation de l'hyperplan H dans la base $\mathscr{B}$</u>.

Exemple 6.12 : Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(2) = 0\}$. Déterminer l'équation de H dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Proposition 6.13 (comparaison de deux équations d'un même hyperplan)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $\mathscr{B}$ une base de E et soit H hyperplan de E.
Si l'hyperplan H admet deux équations dans la base $\mathscr{B}$ alors elles sont proportionnelles.

Remarque : Réciproquement, si deux hyperplans H et H' sont définis par des équations dans une même base qui sont proportionnelles, alors $H = H'$.